ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ

Ας υποθέσουμε ότι $\tau(s)=0$, $\forall s\in I$ (Δηλ. καμπύλη μηδενικής στρέψης)
$\Rightarrow \mathring{\vec{b}}(s)=0 \Rightarrow \vec{b}(s)=w$, όπου w μοναδιαίο διάνυσμα
Έστω συνάρτηση $f: I\to\mathbb{R}$ λεία $f(s)=\langle c(s),w\rangle$
$\mathring{f}(s)=\langle \mathring{c}(s),w\rangle=\langle \vec{t}(s),\vec{b}(s)\rangle=0 \Rightarrow f(s)=a_0=$ σταθερά $\Rightarrow$
$\Rightarrow \langle c(s),w\rangle=a_0$. Δηλαδή η εικόνα της c περιέχεται σε επίπεδο $\perp n$

ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ $\mathbb{R}^3$

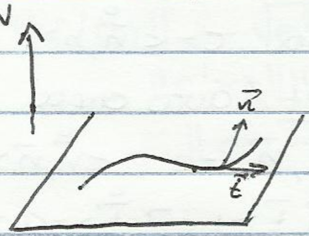
Ορισμός: Μία καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ λέγεται επίπεδη αν.ν η εικόνα της περιέχεται σε κάποιο επίπεδο

Αντίστροφα, έστω η $c(s)$ περιέχεται σε κάθετο επίπεδο ^{w} όπου w μοναδιαίο διάνυσμα $\Rightarrow \langle c(s),w\rangle=$ σταθ $\Rightarrow \langle \mathring{c}(s),w\rangle=0$
τότε $\langle \vec{t}(s),w\rangle=0$

$\Rightarrow \quad k(s)\langle \vec{n}(s), w\rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{n}(s), w\rangle = 0$

Αλλά, τότε $\vec{b}(s) = \vec{t}(s)\times\vec{n}(s) \Rightarrow \vec{b}(s) = \pm w, \ \forall s\in I$

$\Rightarrow \dot{\vec{b}}(s)=0 \Rightarrow \tau(s)=0$



ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με $k(s)>0$ παντού. Η c είναι επίπεδη αν.ν $\tau(s)=0 \ \forall s$.

$\tau = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b}\rangle, \quad \vec{n} = \frac{\ddot{c}}{k}$

$\dot{\vec{n}} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot} \ddot{c} + \frac{1}{k}\dddot{c}, \quad \vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} = \dot{c}\times\frac{\ddot{c}}{k}$

και

$$\tau = \left\langle \left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}\ddot{c} + \frac{1}{k}\dddot{c}, \ \frac{1}{k}\dot{c}\times\ddot{c}\right\rangle = \frac{\langle \dot{c}\times\ddot{c}, \dddot{c}\rangle}{k^2}$$

Έτσι, για καμπύλες με φυσική παράμετρο s και $k(s)>0$ παντού έχουμε:

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2}$$

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^3$ ΜΕ ΤΥΧΑΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

Έστω $c(t)$ κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$.

Το μήκος τόξου είναι $s=s(t)=\int_{t_0}^{t}\|c'(\sigma)\|\,d\sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \Rightarrow$ αντιστρέφεται $t = f(s) = (\ )$

$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|} > 0$. Έστω $\tilde{c} = c\circ f$ αναπαραμέτρηση

$c(s) = \tilde{c}(s) = c(f(s)) = c(t(s))$

Ορισμός: Η καμπυλότητα $k: I\to[0,+\infty)$ της c με συνάρτηση $k(t) = \tilde{k}(s(t))$ είναι $k(t) = \frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$

ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι $\kappa(t)>0 \ \forall t$

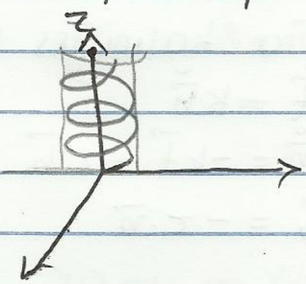
ΟΡΙΣΜΟΣ: Η στρέψη της C είναι η συνάρτηση $\tau: I \to \mathbb{R}$ με $\tau(t)=\tilde{\tau}(s(t))$ τέτοια ώστε:

$$\tau = \frac{[c', c'', c''']}{\|c' \times c''\|^2}$$

Επίσης, τα c', c'', c''' υπολογίζονται από τη διαδικασία
$\dot{c} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc}{dt}$, $\ddot{c} = \dots$, $\dddot{c} = \dots$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΕΛΙΚΑ:

Η (διαφορίσιμη) καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$
$a>0$, $b \neq 0$ βλέπουμε ότι



$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{και} \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Αν $b<0$ τότε είναι αντίθετα προσανατολισμένη
Δηλαδή "πηγαίνει" προς τα αρνητικά του $z'z$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1) Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο s και $\kappa(s)>0$, $\forall s \in I$ και στρέψη τ. Έστω $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $T = T_{\upsilon} \circ A$, $A \in O(3)$
Θεωρούμε καμπύλη $\tilde{c} = T \circ c$

$$\frac{d\tilde{c}}{ds} = A\frac{dc}{ds} = A\dot{c} \Rightarrow \dot{\tilde{c}} = A\dot{c}, \quad \ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c}, \quad \dddot{\tilde{c}} = A\dddot{c}$$

Έτσι, $$\tilde{\tau} = \frac{[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \dddot{\tilde{c}}]}{\tilde{\kappa}^2} = \frac{[A\dot{c}, A\ddot{c}, A\dddot{c}]}{\kappa^2} = \frac{(\det A)[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\kappa^2} =$$

$$= \pm \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\kappa^2}$$

2) Αν $\tilde{s} = -s$ τότε

$$\frac{dc}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}} \cdot \frac{dc}{ds} = -\frac{dc}{ds} = -\dot{c} \Rightarrow \tilde{s}$$ μήκος τόξου

τότε:

$$\tilde{\tau} = \frac{\left[\frac{dc}{d\tilde{s}}, \frac{d^2c}{d\tilde{s}^2}, \frac{d^3c}{d\tilde{s}^3}\right]}{\left\|\frac{d^2c}{d\tilde{s}^2}\right\|^2} \overset{(*)}{=} \frac{[-\dot{c}, \ddot{c}, -\dddot{c}]}{\|\ddot{c}\|^2}$$

$$(*) \quad \frac{d^2c}{d\tilde{s}^2} = -\frac{d}{d\tilde{s}}\dot{c} = -\frac{ds}{d\tilde{s}}\frac{d\dot{c}}{ds} = \ddot{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^3c}{d\tilde{s}^3} = \frac{d}{d\tilde{s}}\ddot{c} = \frac{ds}{d\tilde{s}}\frac{d\ddot{c}}{ds} = -\frac{d\ddot{c}}{ds} = -\dddot{c}$$

Για καμπύλες με φυσική παράμετρο S και $k(s)>0$ παντού

$$\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= k\vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= -k\vec{t} + \tau\vec{b} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau\cdot\vec{n} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}^3$

<u>Ύπαρξη:</u> Έστω $k(s)>0$, $\tau(s)$ λείες συναρτήσεις, $s \in I$ τότε υπάρχει καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο, καμπυλότητα και στρέψη τις δοθήσες συναρτήσεις $k(s)$, $\tau(s)$

<u>Μοναδικότητα:</u> Αν $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ είναι καμπύλες με φυσική παράμετρο S, καμπυλότητα $\tilde{k} = k > 0$ και στρέψη $\tilde{\tau} = \tau$ τότε $\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ που διατηρεί τον προσανατολισμό ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΚΛΙΣΗΣ

<u>Ορισμός:</u> Μια κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται καμπύλη σταθερής κλίσης αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες σχηματίζουν σταθερή γωνία με σταθερό διάνυσμα

πχ → Επίπεδες καμπύλες, κυλινδρικές έλικες

Έτσι, η $c(s)$ είναι σταθεράς κλίσης $\iff \exists$ διάνυσμα μοναδιαίο w ώστε $(\widehat{\vec{t}(s), w}) = \varphi = \sigma\tau\alpha\theta \iff \langle \vec{t}(s), w \rangle = \sigma\tau\alpha\theta$

Παραγωγίζουμε

$$\langle \dot{\vec{t}}, w \rangle = 0 \Rightarrow k\langle \vec{n}, w \rangle = 0 \xrightarrow{k>0} \vec{n} \perp w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \langle w, \vec{t} \rangle \vec{t} + \langle w, \vec{b} \rangle \vec{b}$$

$$w = \cos\varphi\, \vec{t} + \sin\varphi\, \vec{b}$$

Παραγωγίζουμε

$$0 = \cos\varphi\, \dot{\vec{t}} + \sin\varphi\, \dot{\vec{b}} = \cos\varphi\, k\vec{n} - \sin\varphi\, \tau\vec{n} = (k\cos\varphi - \tau\sin\varphi)\vec{n}$$

$$\iff k\cos\varphi = \tau\sin\varphi \iff \frac{\tau}{k} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \iff \frac{\tau}{k} = \cot\varphi$$

Αντίστροφα:

Έστω $c(s)$ καμπύλη με $k(s) > 0$ παντού και $\frac{\tau}{k} = \sigma\tau\alpha\theta = \cot\varphi$

$$\iff k\cos\varphi = \tau\sin\varphi \Rightarrow k\cos\varphi - \tau\sin\varphi = 0$$

Θεωρώ τη διανυσματική συνάρτηση

$$w(s) = \cos\varphi\, \vec{t} + \sin\varphi\, \vec{b}$$

$$\dot{w}(s) = \cos\varphi\, \dot{\vec{t}}(s) + \sin\varphi\, \dot{\vec{b}}(s) = k\cos\varphi\, \vec{n}(s) - \tau\sin\varphi\, \vec{n}(s) = 0 \Rightarrow w(s) = w$$

όπου w: σταθ. και μάλιστα $w = \cos\varphi\, \vec{t} + \sin\varphi\, \vec{b}$, $\|w\| = 1$

$$\langle \vec{t}, \vec{w} \rangle = \cos\varphi = \sigma\tau\alpha\theta$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη στο $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα παντού θετική. Η c καμπύλη σταθεράς κλίσης $\iff \frac{\tau}{k} = \sigma\tau\alpha\theta$, $\varphi =$ κλίση, $w =$ διεύθυνση